V Printed Pages : 7

(21125) Roll No

U.G. - V Sem.

NEP-5049

U. G. Examination, December-2025

MAJOR COURSE (UNDER N.E.P.)

MATHEMATICS

Group & Ring Theory & Linear Algebra

[B030501T]

Time : Three Hours] *[Maximum Marks : 75*

Note : Attempt questions from **all** sections as per instructions.

नोट : सभी खण्डों से निर्देशानुसार प्रश्न हल कीजिए।

Section–A
(खण्ड–अ)
(Very Short Answer Questions)
(अति लघु उत्तरीय प्रश्न)

Note : Attempt all the **five** questions. Each question carries 3 marks. 5×3=15

नोट : सभी **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न 3 अंको का है।

1. Let G be a group, H a subgroup of G, f an automorphism of G. Let $f(H) = \{f(h) : h \in H\}$. Prove that $f(H)$ is a subgroup of G. 3

मान लीजिए कि G, एक समूह है, H, G का एक उपसमूह है, f ; G का एक आटोमॉरफिज्म है। मान लीजिए $f(H) = \{f(h): h \in H\}$ है, तो सिद्ध करें कि $f(H), G$ का उपसमूह है।

2. Add and multiply the following polynomials over the ring of integers :

$f(x) = 2x^0 + 5x + 3x^2 - 4x^3$,

$g(x) = 3x^0 + 4x - x^3 + 5x^4$ 3

$f(x) = 2x^0 + 5x + 3x^2 - 4x^3$,

$g(x) = 3x^0 + 4x - x^3 + 5x^4$

को पूर्णांकों की रिंग में जोड़े और गुणा करें।

3. Show that every field is a principal ideal domain.3

दिखाइए कि प्रत्येक क्षेत्र एक मुख्य आदर्श डोमेन है।

4. Let R be the field of real numbers. Then show that $W = \{(x, 2y, 3z) : x, y, z \in R\}$ is a subspace of $V_3(R)$. 3

मान लीजिए R वास्तविक संख्याओं का क्षेत्र है। तब दिखाएं कि $W = \{(x, 2y, 3z) : x, y, z \in R\}$, $V_3(R)$ का सबस्पेस (उपस्थान) है।

5. Show that

$S = \{(1,2,4),(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$

is a linearly dependent subset of the vector space $V_3(R)$ where R is the field of real numbers. 3

दिखाएं कि $S = \{(1,2,4),(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ वेक्टर स्पेस $V_3(R)$ का एक रेखीय आश्रित उपसमूह है, जहां पर R वास्तविक संख्याओं का क्षेत्र है।

Section–B

(खण्ड-ब)

(Short Answer Questions)

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

Note : Attempt any **two** questions out of the following three questions. Each question carries 7.5 marks.

2×7.5=15

नोट : निम्नलिखित तीन प्रश्नों में से किन्हीं **दो** प्रश्नों का उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न 7.5 अंकों का है।

6. In the vector space R^3, let $\alpha = (1,2,1)$, $\beta = (3,1,5)$, $\gamma = (3,-4,7)$. Show that the subspaces spanned by $S = \{\alpha,\beta\}$ and $T = \{\alpha,\beta,\gamma\}$ are the same. 7.5

वेक्टर स्पेस R^3 में, मान लीजिए $\alpha = (1,2,1)$, $\beta = (3,1,5), \gamma = (3,-4,7)$. दिखाएं कि $S = \{\alpha,\beta\}$ तथा $T = \{\alpha,\beta,\gamma\}$ द्वारा फैला हुआ सबस्पेस एक समान है।

7. Let T be an invertible linear transformation on a vectorspace $V(F)$. Then $T^{-1}T = I = TT^{-1}$

माना कि T एक विलोमीय रैखिक रूपांतरण है। तब $T^{-1}T = I = TT^{-1}$

8. Show that the polynomial $x^2 + x + 4$ is irreducible over F, the field of integers modulo 11.

दिखाएं कि बहुपद $x^2 + x + 4$ क्षेत्र F पर जो कि 11 के मॉड्यूलो वाले पूर्णांक का क्षेत्र है, अलघुकरणीय है।

Section–C

(खण्ड-स)

(Detailed Answer Questions)

(विस्तृत उत्तरीय प्रश्न)

Note : Attempt any **three** questions out of the following five questions. Each question carries 15 marks. 3×15=45

नोट : निम्नलिखित पाँच प्रश्नों में से किन्हीं **तीन** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न 15 अंकों का है।

9. Let G be an infinite cyclic group. Determine $Aut\ G$, the group of all automorphism of G.

माना कि G एक अनंत चक्रीय समूह है। $Aut\ G$ निर्धारित करें, जो G के सभी स्वतः रूपान्तरणों (स्वाकारिकताओं) का समूह है।

10. Every principal ideal domain is a unique factorization domain. 15

प्रत्येक मुख्य गुणजावली प्रान्त एक अद्वितीय गुणनखण्डन प्रान्त होता है।

11. If a finite dimensional vector space $V(F)$ is a direct sum of two subspaces W_1 and W_2, then $\dim V = \dim W_1 + \dim W_2$. 15

यदि एक सीमित आयामी वेक्टर स्पेस $V(F)$ दो सबस्पेस W_1 तथा W_2 का प्रत्यक्ष योग है तब $\dim V = \dim W_1 + \dim W_2$

12. State and prove Bessel's inequality for finite dimensional spaces. https://www.ccsustudy.com 15

बेसेल की असमानता को सीमित आयामी स्पेसों के लिए कथित और सिद्ध कीजिए।

13. Let T be a linear operator on R^3 defined by

$$T(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 + x_3, -2x_1 + x_2, -x_1 + 2x_2 + 4x_3)$$

Prove that T is invertible and find a formula for $T^{(-1)}$. 15

माना T, R^3 पर एक रैखिक संचालक है, जिसे निम्न प्रकार परिभाषित किया गया है -

$$T(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 + x_3, -2x_1 + x_2, -x_1 + 2x_2 + 4x_3)$$

सिद्ध करें कि T विलोमीय है, और $T^{(-1)}$ के लिए एक सूत्र खोजें।